# Chap 4.3

## 定积分的计算

- 由*Newton-Leibnitz*公式，定积分的计算归结为求被积函数的原函数，从而与不定积分联系起来

- 积分表依然重要

例 计算下列定积分

(1) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x dx$

- 定积分的凑微分法

$\int f(x)dx = F(x)+C$，$f$与$\varphi'$连续，则

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x))\Big|_a^b$$

例　计算下列定积分

(1) $\int_0^2 \frac{xdx}{1+x^2}$　　(2) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{2}} 6\sin x\cos^2 xdx$

(3) $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}dx$

- 一个重要的结论

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f(x)\text{为奇函数} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x)\text{为偶函数} \end{cases}$$

例　求下列积分

(1) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a\cos x + b\sin x)^2 dx$

(2) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} dx$

**H.W**

习题4

10 (3) – (6)

10 (7) (9) (10)

11 (1) (5)–(13) (17)

## 定积分的第二换元法

$f(x)\in C[a,b],\psi'$连续，　$\psi(\alpha)=a,\psi(\beta)=b$

当$t$在$\alpha,\beta$之间时，　$\psi(t)\in[a,b]$, 则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)dt$$

例　　求下列定积分

(1)　$I=\int_a^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx\quad(a>0)$

(2)　$I=\int_0^1\sqrt{e^x-1}dx$

例　$f(x)$是周期为$T$的连续函数，试证

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

- 两个公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

从几何上考虑，这两个公式都是自然的

例　试求积分

$$(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx \qquad (2)\int_0^{\pi}\frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$$

**H.W**

习题4

11 (2) − (4)，　(14) − (16)，　(18)

## 分部积分法(定积分)

$u', v' \in C[a,b] \Rightarrow$

$$\int_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b - \int u'vdx$$

$$\Downarrow \qquad \Uparrow$$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

例 计算下列定积分

(1) $\int_0^1 \arctan\sqrt{x}dx$

(2) $\int_{e^{-1}}^{e} |\ln x|dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

- 公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇数} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

例 求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^3 x \, dx$

例　设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ $(n \geq 2, \text{整数})$, 试证

$$I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$$

例　设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续，试证:

$$\int_0^1 [\int_0^x f(t)dt]dx = \int_0^1 (1-x) f(x)dx$$

**H.W** 习题4

12 (1) – (8)

例 设 $f(x)=\sin x+\int_0^{\pi} f(x)dx$, 求 $f(x)$

- 若式子改为如下形式怎么办?

(1) $f(x)=\sin x+\int_0^{\pi} x f(x)dx$

(2) $f(x)=3x^2-x\int_1^2 f(x)dx+2\int_0^1 f(x)dx$

**H.W** 补充题 设连续函数 $f(x)$满足

$f(x)=\ln x-\int_1^e f(x)dx$, 求 $\int_1^e f(x)dx$

# Chap 4.4

## 反常积分

# 4.4.1 无穷区间的反常积分

- 定义

$\forall b > a$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 均可积，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

称为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的反常积分

- 上述极限存在时，称反常积分收敛；否则称反常积分发散

- 类似地定义 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$ ← 两项都收敛，左端才收敛

## 计算法

连续函数 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$$

引进记号 $F(x)\Big|_a^{+\infty}$

例 计算下列反常积分

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

(2) $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \quad (a>0)$

(3) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx \quad (a,b>0)$

(4) $\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt$ (其中$P$是正常数)

(5) $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x-1}}$

例 (第二宇宙速度) 在地球表面发射火箭，初速度多少才能脱离地球引力？

**H.W 习题4**

17 (2)－(6)

## 5.7.2 无界函数的反常积分

- 定义

$f(x)$ 在$b$的左邻域无界(称b为瑕点)，$\forall \varepsilon > 0$，$f(x)$在$[a, b-\varepsilon]$可积，则

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

称为$f(x)$ 在 $[a, b]$ 的反常积分

- 上述右端极限存在时，称反常积分收敛；否则称此反常积分发散

- 类似地可定义左端点$a$ 为瑕点的反常积分

- 当瑕点在积分区间内，需分为两个反常积分之和

  - 计算法

$F(x)$ 是连续函数 $f(x)$的原函数, $b$ 是瑕点，

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$$

例　计算下列积分

(1) $\int_0^1 \ln x dx$　　(2) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $\int_0^1 x^{\lambda} dx$

(4) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$

(5) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

(6) $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$ (三角变换)

**H.W 习题4**

17 (7) (9)－(12) (14)

16 (1) 18

# Chap 4.5

## 定积分的应用

## 5.6.1 微元法

某个量分布在区间 $[a,b]$ 上，如果有

$$dF = f(x)dx$$

那么

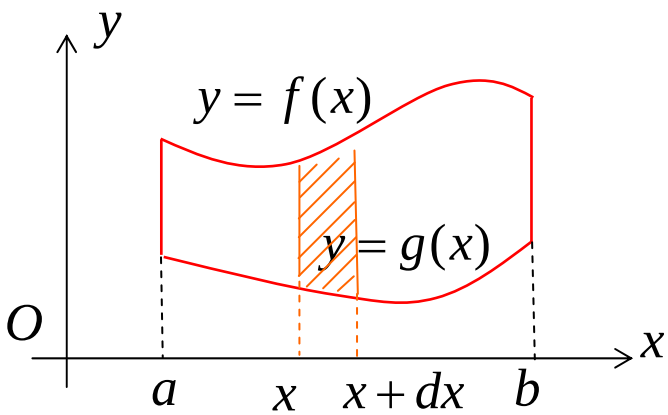
$$F = \int_a^b f(x)dx$$

问题是：我们怎样得到 $f(x)$？

- 微元法：分析在小区间分布的部分量 $\Delta F$ 的线性主部 $dF$ 来得到 $f(x)dx$
  - $\Delta F$ 与 $dF$ 的差是高阶无穷小 $o(\Delta x)$

# 4.5.2 几何应用 – 面积

- 直角坐标系




若 $f(x), g(x)$在$[a,b]$ 连续，$f(x) \geq g(x)$

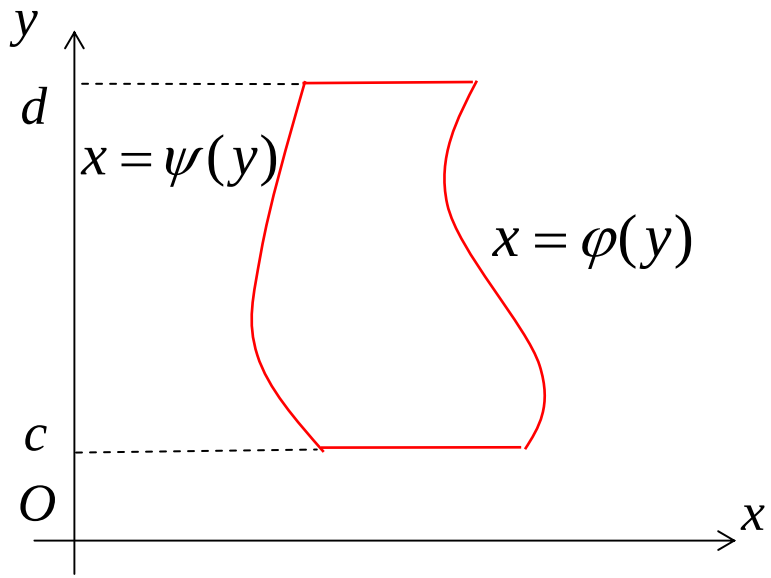
求由 $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$

所围图形面积

考虑 $[x, x+dx]$ 上的面积

$$\Delta A \approx [f(x) - g(x)]dx$$

$$\Rightarrow \quad A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$




如左图的图形，面积＝？

$$A=\int_c^d [\varphi(y)-\psi(y)]dy$$

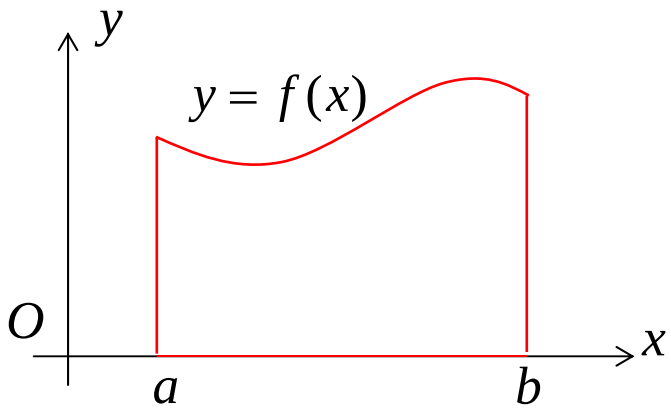
例　求下列图形的面积

(1) $y=x^2$ 与 $y=x$ 所围图形

(2) $y^2=-4(x-1)$ 与 $y^2=-2(x-2)$ 所围图形

## 参数方程形式

若曲边梯形的曲边方程为参数形式，




$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

（其中 $a = x(\alpha)$，$b = x(\beta)$）

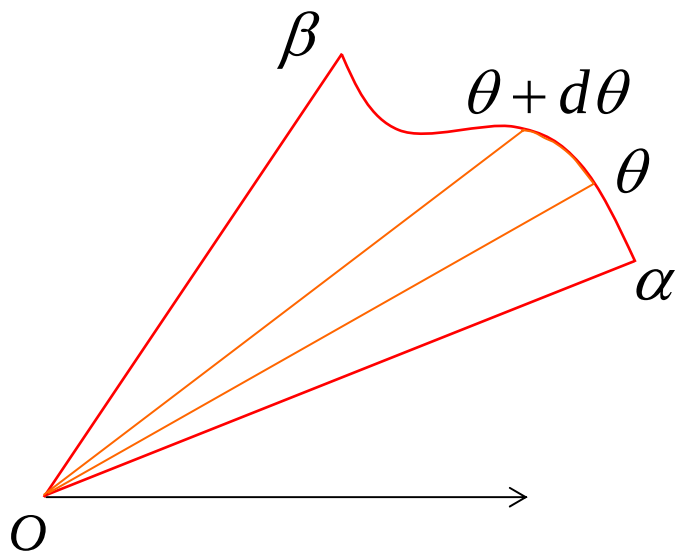
则曲边梯形的面积

$$A = \int_a^b y dx = \int_\alpha^\beta y(t) x'(t) dt$$

例　求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积

- 极坐标形式

由曲线 $r=r(\theta)$, 射线 $\theta=\alpha, \theta=\beta$ 所围成的图形面积 $A=?$




考虑 $[\theta, \theta+d\theta]$ 上的面积

$$\Delta A \approx \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta}$$

例　求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 所围面积

例　求双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 所围图形的面积

**H.W 习题4**

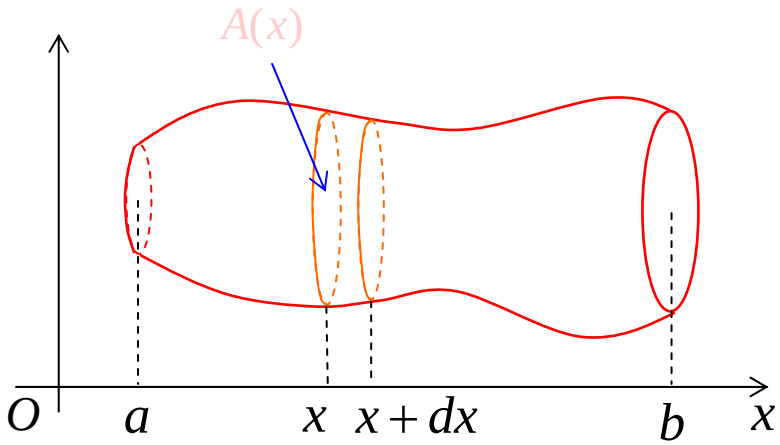
20－23

补充题　1. 求星形线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ 所围面积

2. 求心脏线 $r=2a(1-\cos\theta)$ 所围面积

# 几何应用 – 体积

- 已知截面积的几何体



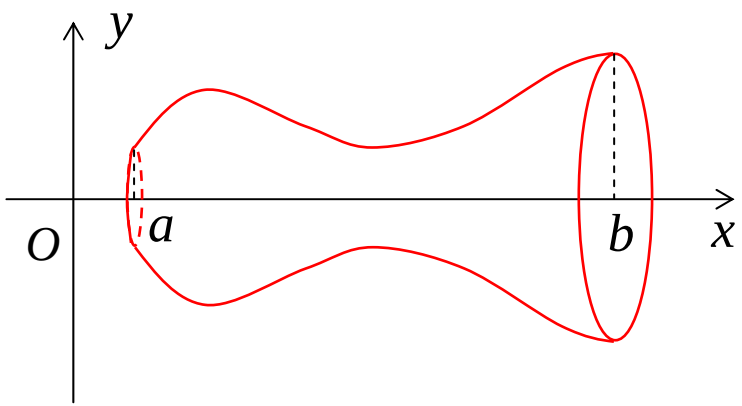

若几何体的底面与$x$ 轴垂直，而在$x$ 处平行底面的截面面积为$A(x)$, 求其体积 $V$ $(a \leqslant x \leqslant b)$

考虑 $[x,x+dx]$ 上的体积

$$\Delta V \approx A(x)dx$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \int_a^b A(x)dx}$$

## 旋转体体积




由曲线 $y=f(x)\ (\geqslant 0)$，直线 $x=a, x=b$ 和$x$ 轴围成的曲边梯形绕$x$ 轴旋转所得几何体 (旋转体) 的体积

$$V=\int_a^b \pi y^2 dx=\int_a^b \pi f^2(x)dx$$

- 曲线$x=x(y)\ (\geqslant 0)$ 绕$y$ 轴所得旋转体体积?

例 分别求$y = x^2$与$x = 1$所围平面图形绕$x$轴，$y$轴所得旋转体的体积

例 求 $y = \sin x$（$0 \leqslant x \leqslant \pi$）与$x$轴所围图形绕 $x$ 轴旋转所得旋转体的体积

例 求椭圆 $x = a\cos t, y = b\sin t$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 所围图形绕 $x$ 轴旋转所得旋转体的体积

**H.W 习题4 25 26 27**

# 4.4.3 医药和物理应用

- 血液中胰岛素平均浓度

患者血液中胰岛素浓度(单位/毫升)在$t$时(分)为

$$c(t)=\begin{cases}10t-t^2, & 0\le t\le 5\\ 25e^{-k(t-5)}, & t>5\end{cases},\quad 其中 k=\frac{1}{20}\ln 2$$

求1小时内患者体内胰岛素平均浓度

依照积分中值定理

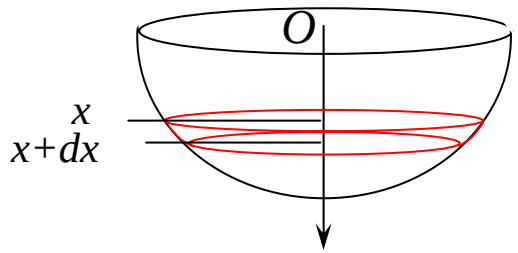
$$\overline{c(t)}=\frac{1}{60-0}\int_0^{60}c(t)dt$$

例　(做功问题)　内半径1米的半球形水池，将满池水抽尽，需做功多少？

如图建坐标系

抽出 $[x,x+dx]$ 薄层做功

$dW=?$




**H.W 习题4**

28 – 30